

Diferentes Semillas para Solucionar las Ecuaciones de la Cinética Puntual Estocástica Empleando el Método de Euler-Maruyama

Daniel Suescún Díaz y Mauricio Oviedo Torres
Universidad Surcolombiana
Av. Pastrana Borrero – Carrera 1
daniel.suescun@usco.edu.co; u20121108695@usco.edu.co

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio numérico de las ecuaciones diferenciales estocásticas que describen la cinética en un reactor nuclear. Dichas ecuaciones conocidas como las ecuaciones estocásticas de la cinética puntual modelan las variaciones temporales de la densidad de población de neutrones y concentraciones de precursores de neutrones diferidos. Debido a que estas ecuaciones son de naturaleza probabilística (ya que se consideraron que las oscilaciones aleatorias en los neutrones y población de precursores son aproximadamente normalmente distribuidas, y que además estas ecuaciones poseen las propiedades de acoplamiento fuerte y rigidez) el método propuesto para las simulaciones numéricas es el esquema de Euler-Maruyama que proporciona muy buenas aproximaciones para el cálculo de la población de neutrones y concentraciones de precursores de neutrones diferidos. El método propuesto para éste trabajo fue probado computacionalmente para diferentes semillas, condiciones iniciales, datos experimentales y formas de reactividad para un grupo de precursores y luego para seis grupos de precursores de neutrones diferidos en cada paso de tiempo con 5000 movimientos Brownianos por cada semilla. En un trabajo reportado en la literatura fue planteado el método de Euler-Maruyama, pero existen muchas dudas acerca de los valores reportados además de que no informan de la semilla usada, por lo que en este trabajo se espera rectificar los valores reportados. Después de tomar el promedio de las diferentes semillas usadas para generar los números pseudoaleatorios, los resultados proporcionados por el esquema de Euler-Maruyama serán comparados en media y desviación estándar con otros métodos reportados en la literatura y resultados del modelo determinístico de las ecuaciones de la cinética puntual. Ésta comparación confirma particularmente que el esquema de Euler-Maruyama es un método eficiente para resolver las ecuaciones de la cinética puntual estocástica, pero diferente a los valores encontrados y reportados por otro autor. El método de Euler-Maruyama es simple y fácil de implementar, proporciona resultados aceptables para la densidad de población de neutrones y concentración de precursores de neutrones diferidos y son computacionalmente eficientes para la obtención de soluciones que minimicen el problema de rigidez de las ecuaciones de la cinética puntual estocástica en cada paso de tiempo.

1. INTRODUCCIÓN

La cinética de un reactor nuclear es modelada por las ecuaciones de la cinética puntual, las cuales son un conjunto de ecuaciones diferenciales fuertemente acopladas no lineales que describen las

poblaciones de neutrones y concentraciones de precursores de neutrones diferidos [1]. La solución de estas ecuaciones permite a los técnicos e ingenieros de una planta nuclear comprender las fluctuaciones de la potencia experimentadas durante el arranque o parada del reactor cuando las barras de control son ajustadas [2]. Estas ecuaciones son determinísticas y modelan el valor medio de la densidad de neutrones, concentraciones de precursores de neutrones diferidos y niveles de potencia en un reactor crítico y subcrítico, donde las fluctuaciones aleatorias de la densidad de neutrones y precursores de neutrones se hacen más evidente [3-4].

La evolución del estado de un reactor nuclear es esencialmente un proceso estocástico, en general, debe ser descrito matemáticamente por un conjunto de ecuaciones de cinética estocástica. Para la mayoría de los problemas en la física de reactores basta con describir el valor medio del estado de las variables de una manera determinista e ignorar el valor estocástico. Sin embargo, las características estocásticas de las variables de estado son importantes en el análisis del encendido de un reactor en presencia de una fuente débil [5].

Las soluciones computacionales de estas ecuaciones diferenciales estocásticas son conseguidas mediante el esquema de Euler-Maruyama [6] sobre cada paso de tiempo y comparadas con métodos reportados en la literatura, ya que en uno de los trabajos existen fuertes dudas acerca de los resultados reportados [7], pues además de no informar de la semilla usada para la generación de números pseudoaleatorios, la desviación estándar difiere de los resultados proporcionados por otros métodos.

Para solucionar el problema anterior, se toma el promedio de los resultados obtenidos con diferentes semillas que generan los números pseudoaleatorios, y se comparan en media y desviación estándar con los trabajos existentes y los resultados proporcionados con el modelo determinístico.

2. FORMULACIÓN ESTOCÁSTICA DEL MODELO

Las ecuaciones de la cinética puntual determinísticas pueden ser derivadas de tal forma que sea útil separar los procesos de nacimiento y muerte de las poblaciones de neutrones y precursores de neutrones, donde se considera que el nacimiento de neutrones se debe procesos primarios de fisión, decaimientos o a fuentes de neutrones externas, y para la muerte de neutrones se debe a capturas (sin fisión) o fugas neutrónicas [8].

De esta forma, para m grupos de precursores se demuestra que la dinámica de un reactor nuclear para un tiempo t dado, se puede escribir como

$$\frac{dn(t)}{dt} = -\left(\frac{1-\rho(t)-\alpha}{\Lambda}\right)n(t) + \left(\frac{1-\alpha-\beta}{\Lambda}\right)n(t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i(t) + q(t) \quad (1)$$

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda}n(t) - \lambda_i c_i(t) \quad (2)$$

Para $i = 1, \dots, m$, donde m es el número de grupos de precursores, $\alpha = 1/\nu$ una constante, ν es el promedio de neutrones producidos por los eventos de fisión, λ_i es la constante de decaimiento del i -ésimo grupo de precursores, β_i es la fracción de neutrones que son del i -ésimo grupo de

precursores, $\beta = \sum_{i=1}^m \beta_i$ es la fracción total de neutrones precursores, $\rho(t)$ la reactividad y $q(t)$ la fuente de neutrones.

Las ecuaciones (1) y (2) son las ecuaciones de la cinética puntual determinística, donde (1) es la variación temporal de la densidad de neutrones, para la cual el término $[(1 - \rho(t) - \alpha)/\Lambda]n(t)$ representa la muerte de un neutrón en captura por absorción o fuga, $[(1 - \alpha - \beta)/\Lambda]n(t)$ representa al nacimiento de un neutrón, $\sum_{i=1}^m \lambda_i c_{i(t)}$ representa al esperado total de precursores que decaen emitiendo neutrones diferidos y $q(t)$ al término asociado a una fuente externa que produce neutrones.

Por otro lado la ecuación (2) es la variación temporal de la densidad de precursores, donde el término $(\beta_i/\Lambda)n(t)$ representa al i-ésimo grupo de precursores que están siendo producidos en fisiones primarias y $\lambda_i c_{i(t)}$ representa al decaimiento del i-ésimo grupo de precursores.

El análisis hecho a los términos de las ecuaciones (1) y (2) de los posibles futuros de los neutrones permite escribir un conjunto de eventos de nacimiento o muerte y sus probabilidades asociadas, es decir

$$|\Delta P_{m+3}\rangle = \begin{bmatrix} \Delta n \\ \Delta c_1 \\ \Delta c_2 \\ \vdots \\ \Delta c_m \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$|\Delta P_1\rangle = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad p_1 = hdn \quad (4)$$

$$|\Delta P_2\rangle = \begin{bmatrix} (1 - \beta)v - 1 \\ \beta_1 v \\ \beta_2 v \\ \vdots \\ \beta_m v \end{bmatrix} ; \quad p_2 = hbn \quad (5)$$

$$|\Delta P_3\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad p_3 = h\lambda_1 c_1 \quad (6)$$

$$|\Delta P_4\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad p_4 = h\lambda_2 c_2 \quad (7)$$

$$|\Delta P_{m+2}\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} ; \quad p_{m+2} = h\lambda_m c_m \quad (8)$$

$$|\Delta P_{m+3}\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad p_{m+3} = hq \quad (9)$$

donde $b = (v\Lambda)^{-1}$ y $d = (1 - \rho(t) - \alpha)(\Lambda)^{-1}$. Por otra parte $|\Delta P_1\rangle$ representa un evento de captura, $|\Delta P_2\rangle$ un evento de fisión con $(1 - \beta)v - 1$ neutrones producidos y $\beta_m v$ neutrones diferidos, $|\Delta P_{m+2}\rangle$ un evento donde una concentración c_m decae emitiendo un neutrón diferido y $|\Delta P_{m+3}\rangle$ representa al evento de nacimiento de un neutrón producto de una fuente. De la misma forma el conjunto p_1, p_2, \dots, p_{m+3} representa a cada una de sus probabilidades asociadas a los eventos posibles y $h = \Delta t$ al intervalo de tiempo donde ocurre uno de dichos eventos.

De esta manera las ecuaciones estocásticas de la cinética puntual se obtienen usando el teorema límite central [9], logrando así demostrar un conjunto de procesos estocásticos de $It\hat{o}$ [10] para la población de neutrones y precursores de neutrones

$$\frac{d}{dt} |P(t)\rangle = \hat{A} |P(t)\rangle + |Q\rangle + \hat{B}^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} |W(t)\rangle \quad (10)$$

donde

$$|P(t)\rangle = \begin{bmatrix} n(t) \\ c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_m(t) \end{bmatrix} ; \quad |Q\rangle = \begin{bmatrix} q(t) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$|\Delta W(t)\rangle = \sqrt{\Delta t} |\eta\rangle$; $|\eta\rangle$ es un vector de variables aleatorias uniformemente distribuidas con media 0 y desviación estándar 1, y $W_{1(t)}, W_{2(t)}, W_{3(t)}, \dots$ son procesos Wiener

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} & -\lambda_1 & -\lambda_2 & \dots & -\lambda_m \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\beta_2}{\Lambda} & 0 & -\lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \frac{\beta_m}{\Lambda} & 0 & \dots & 0 & -\lambda_m \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \zeta & a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ a_1 & r_1 & b_{2,3} & \dots & b_{2,m+1} \\ a_2 & b_{3,2} & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b_{m,m+1} \\ a_m & b_{m+1,2} & \dots & b_{m+1,m} & r_m \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde

$$\zeta = \gamma n_{(t)} + \sum_{i=1}^m \lambda_i c_{i(t)} + q_{(t)} \quad (14)$$

$$\gamma = \frac{-1 - \rho_{(t)} + 2 \sum_{i=1}^m \beta_i + (1 - \sum_{i=1}^m \beta_i)^2 v}{\Lambda} \quad (15)$$

$$a_i = \frac{\beta_i}{\Lambda} [(1 - \sum_{i=1}^m \beta_i)v - 1] n_{(t)} - \lambda_i c_{i(t)} \quad (16)$$

$$b_{i,j} = \frac{\beta_{i-1} \beta_{j-1} v n_{(t)}}{\Lambda} \quad (17)$$

$$r_i = \frac{\beta_i^2 v n_{(t)}}{\Lambda} + \lambda_i c_{i(t)} \quad (18)$$

El sistema (10) se conoce como las ecuaciones estocásticas de la cinética puntual y generalizan a las ecuaciones determinísticas de la cinética puntual ya que cuando $\hat{B} = 0$ se regresa al modelo clásico determinístico.

3. MOVIMIENTO BROWNIANO O PROCESO WIENER

Un movimiento browniano o proceso Wiener definido sobre un intervalo $[0, T]$ es una variable aleatoria $W_{(t)}$ que satisface las siguientes propiedades [11]:

- $W_{(0)} = 0$ con probabilidad $P = 1$.
- Para $0 \leq s \leq t \leq T$ la variable aleatoria dada por un incremento $W_{(t)} - W_{(s)}$ está distribuida normalmente con media cero y varianza $t - s$, donde $W_{(t)} - W_{(s)} \sim \sqrt{t - s} N(0,1)$. Aquí $N(0,1)$ es una variable aleatoria normalmente distribuida con media 0 y varianza 1.
- Para $0 \leq s \leq t < u < v \leq T$ los incrementos $W_{(t)} - W_{(s)}$ y $W_{(v)} - W_{(u)}$ son independientes.

Para la reproducción de los resultados es necesario la generación de un conjunto de números pseudoaleatorios, para esto se necesita de un valor inicial conocido como semilla y que siga una ley de generación dada por una distribución uniforme $N(0,1)$. Matlab usa una función predeterminada "randn", ligada a un 'state' para la semilla.

En este trabajo se soluciona la ecuación matricial (10), simulando cinco mil caminos Brownianos por cada semilla, lo cual permite un mayor muestreo de resultados los cuales tendrán importancia en la rectificación [7].

Los resultados para un tiempo t dado serán analizados mediante:

$$E[X] = \sum_{i=1}^I x_i p(x_i) \quad (19)$$

$$\sigma[X] = \sqrt{\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (x_i - E[X])^2} \quad (20)$$

donde, $E[X]$ es la esperanza y $\sigma[X]$ es la desviación estándar del conjunto de datos X , x_i es el i -ésimo valor de la población de neutrones o concentración de precursores, $p(x_i)$ es la probabilidad asociada al valor x_i dado por una distribución uniforme.

4. ESQUEMA DE EULER-MARUYAMA

Una de las aproximaciones discretas de un proceso estocástico de $It\hat{o}$ es el esquema de Euler-Maruyama [12]. Se considera un proceso de $It\hat{o}$ $X = \{X_t, t_0 \leq t \leq T\}$ que satisface la ecuación diferencial estocástica definida sobre un intervalo $[0, T]$

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \quad (21)$$

Con condición inicial

$$X_{(t=0)} = X_0 \quad (22)$$

La aproximación de Euler-Maruyama consiste en proceso estocástico continuo $Y = \{Y(t), t_0 \leq t \leq T\}$ que satisface el esquema

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta + b(\tau_n, Y_n)\Delta W \quad (23)$$

donde $Y_n = Y(\tau_n)$, $a = a(\tau_n, Y_n)$, $b = b(\tau_n, Y_n)$, $\Delta = \tau_{n+1} - \tau_n$, $\Delta W = W_{n+1} - W_n$ y con valor inicial $Y_0 = X_0$. En este trabajo la ecuación (21) se generaliza para un proceso de $It\hat{o}$ multidimensional, ya que las ecuaciones estocásticas de la cinética puntual para m precursores es un sistema de $m + 1$ ecuaciones diferenciales estocásticas.

Es importante tener en cuenta que existe otro método estocástico reportado en la literatura [7], conocido como Taylor 1.5, el cuál resultará importante en un futuro análisis

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta + b\Delta W + \frac{1}{2}bb'[(\Delta W)^2 - \Delta] + a'b\Delta Z + \frac{1}{2}\left(aa' + \frac{1}{2}b^2a''\right)\Delta^2 + \left(ab' + \frac{1}{2}b^2b''\right)(\Delta W\Delta - \Delta Z) + \frac{1}{2}b[bb'' + (b')^2]\left[\frac{1}{3}(\Delta W)^2 - \Delta\right]\Delta W \quad (24)$$

$$\Delta W = N_1 \sqrt{\Delta} \quad (25)$$

$$\Delta Z = \frac{1}{2} \Delta^{3/2} \left(N_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} N_2 \right) \quad (26)$$

donde a' , b' son respectivamente las primeras derivadas de a y b respecto t , mientras que los términos $N_1 = N_1(0,1)$, y $N_2 = N_2(0,1)$ son distribuciones uniformes independientes de números pseudoaleatorios con media 0 y varianza 1.

5. RESULTADOS COMPUTACIONALES

La primera simulación consiste en un grupo de la concentración de precursores ($m = 1$), asumiendo que la constante de decaimiento del precursor tiene un valor $\lambda_1 = 0.1s^{-1}$, la fracción de precursor y fracción total $\beta_1 = \beta = 0.05$, un número promedio de neutrones por fisión $\nu = 2.5$, un tiempo de generación $\Lambda = 2/3$ s, una reactividad constante de $\rho_{(t)} = -1/3$ y una fuente externa $q_{(t)} = 200s^{-1}$, con condiciones iniciales $X_0 = [400 \ 300]^T$ y usando 5000 caminos Brownianos por cada semilla para 40 pasos en un intervalo $[0, T]$ donde $T = 2s$. En la Tabla I se presentan las esperanzas y desviaciones estándar para diez semillas con sus promedios calculadas con la ecuación (19) y (20), donde la concentración total de precursores se define $c_\tau = \sum_{i=1}^m c_i$

Tabla I. Esperanzas y desviaciones estándar con diferentes semillas para un grupo de precursores.

Semilla	$E(n_{(2)})$	$\sigma(n_{(2)})$	$E(c_{\tau(2)})$	$\sigma(c_{\tau(2)})$
100	399.88063	31.59582	299.79632	7.89653
200	399.34122	32.27301	299.87623	7.93811
300	399.13049	31.64457	299.98258	8.12800
400	399.58241	31.28730	299.95773	8.01188
500	400.30850	31.30682	299.92263	7.89624
600	399.66716	31.38456	300.05116	8.06214
700	399.59571	31.75757	299.81615	7.96561
800	399.56296	31.78474	299.97642	7.76056
900	399.05652	31.65623	299.87921	7.97168
1000	400.00697	31.87561	300.04076	7.96911
Promedio	399.61326	31.65662	299.92992	7.95999

La segunda y tercera simulación consiste ahora en un problema de seis grupos de la concentración de precursores ($m = 6$) con los siguientes parámetros: constantes de decaimiento de los i -ésimos grupos de precursores $\lambda_i = [127, 317, 1150, 3110, 14000, 38700] \times 10^{-4}s^{-1}$, las fracciones de precursores $\beta_i = [266, 1491, 1316, 2849, 896, 182] \times 10^{-6}$ y fracción total $\beta = 0.007$, un número promedio de neutrones por fisión $\nu = 2.5$, un tiempo de generación $\Lambda = 2 \times 10^{-5}$ s y una fuente externa $q_{(t)} = 0 s^{-1}$. Para los resultados de la Tabla II se usó un valor de reactividad $\rho_{(t)} = 0.003$ analizados en un intervalo de tiempo $[0, T]$ con $T = 0.1s$.

Para la Tabla III se usó una reactividad de $\rho(t) = 0.007$ analizados en un intervalo de tiempo $[0, T]$ con $T = 0.001s$. En ambos experimentos se usó 5000 caminos Brownianos para cada una de las semillas en un intervalo de 40 pasos con condiciones iniciales $X_0 = 100[1 \ \beta_1/\lambda_1\Lambda \ \beta_2/\lambda_2\Lambda \ \beta_3/\lambda_3\Lambda \ \dots \ \beta_6/\lambda_6\Lambda]^T$.

Tabla II. Esperanzas y desviaciones estándar con diferentes semillas para seis grupos de precursores (reactividad 300 pcm).

Semilla	$E(n_{(0,1)})$	$\sigma(n_{(0,1)})$	$E(c_{\tau(0,1)})$	$\sigma(c_{\tau(0,1)})$
100	196.51030	223.18868	449672.79	1852.2259
200	196.55932	216.69136	449654.64	1872.8934
300	189.79846	220.03167	449743.19	1911.2396
400	195.43691	223.91395	449702.67	1854.8454
500	192.81295	223.18512	449721.58	1897.6682
600	194.03952	216.90942	449710.81	1912.7226
700	193.37162	220.36080	449700.44	1895.8417
800	190.96917	216.96693	449699.70	1871.6279
900	195.29645	222.04630	449713.79	1900.1589
1000	190.69389	216.81531	449705.52	1947.8640
Promedio	193.54886	220.01095	449702.52	1891.7088

Tabla III. Esperanzas y desviaciones estándar con diferentes semillas para seis grupos de precursores (reactividad 700 pcm).

Semilla	$E(n_{(0,0.01)})$	$\sigma(n_{(0,0.01)})$	$E(c_{\tau(0,0.01)})$	$\sigma(c_{\tau(0,0.01)})$
100	133.99430	91.9343678	446360.14	18.480658
200	133.64878	91.7696655	446359.84	18.634740
300	137.87551	94.1548305	446360.72	18.820938
400	135.30289	90.9411846	446360.14	18.355764
500	134.49149	91.8940470	446360.28	18.473932
600	134.95066	94.5026142	446360.21	18.803987
700	135.35949	94.7267623	446360.26	18.943710
800	133.59650	91.6227033	446360.19	18.485542
900	136.07542	92.4195161	446360.41	18.583754
1000	135.71951	95.1672144	446360.41	18.785393
Promedio	135.10146	92.9132906	446360.26	18.636842

Las siguientes tablas muestran la comparación de las soluciones promediadas con diferentes semillas en la actual propuesta bajo el esquema de Euler-Maruyama usando los mismos parámetros, datos experimentales y forma de reactividad frente a métodos reportados en la literatura.

Entre los métodos a comparar se encuentra el esquema de Euler-Maruyama y Taylor 1.5 [7], PCA Estocástico y Montecarlo [13] y resultados de la simulación determinística calculada con el método de Runge-Kutta de cuarto orden ($E(n_{(T)})$ y $E(c_{\tau(T)})$).

Se puede observar que los valores de las desviaciones estándar para la densidad de neutrones y concentración total de precursores c_τ son diferentes a los reportados aquí y por los demás métodos.

Tabla IV. Comparación de los métodos para un precursor.

Método	Monte Carlo [13]	PCA [13]	Euler-Maruyama [7]	Taylor 1.5 [7]	Euler-Maruyama (Actual Propuesta)	Runge-Kutta
$E(n_{(2)})$	400.03	395.32	412.23	412.10	399.61	400.00
$\sigma(n_{(2)})$	27.311	29.411	34.391	34.519	31.656	-
$E(c_{\tau(2)})$	300.00	300.67	315.96	315.93	299.93	300.00
$\sigma(c_{\tau(2)})$	7.8073	8.3564	8.2656	8.3158	7.959	-

Tabla V. Comparación de los métodos para seis precursores con $\rho = 300\text{pcm}$.

Método	Monte Carlo [13]	PCA [13]	Euler-Maruyama [7]	Taylor 1.5 [7]	Euler-Maruyama (Actual Propuesta)	Runge-Kutta
$E(n_{(0.1)})$	183.04	186.31	208.60	199.40	193.55	179.954
$\sigma(n_{(0.1)})$	168.79	164.16	255.95	168.54	220.01	-
$E(c_{\tau(0.1)})$	447800.0	449100.0	449800.0	449700.0	449702.5	448878.1
$\sigma(c_{\tau(0.1)})$	1495.7	1917.2	1233.3	1218.8	1891.7	-

Tabla VI. Comparación de los métodos para seis precursores con $\rho = 700\text{pcm}$.

Método	Monte Carlo [13]	PCA [13]	Euler-Maruyama [7]	Taylor 1.5 [7]	Euler-Maruyama (Actual Propuesta)	Runge-Kutta
$E(n_{(0.001)})$	135.67	134.55	139.57	139.57	135.10	135.00
$\sigma(n_{(0.001)})$	93.376	91.242	92.042	92.047	92.913	-
$E(c_{\tau(0.001)})$	446400.0	446400.0	446300.0	446300.0	446360.2	446360.4
$\sigma(c_{\tau(0.001)})$	16.226	19.444	6.071	18.337	18.636	-

Los resultados dados por las Tablas I-VI muestran que los valores obtenidos con el esquema de Euler-Maruyama y Taylor 1.5 reportados en [7] son muy parecidos entre ellos, pero difieren de los presentados en la actual propuesta. Los autores no reportaron que generador de números pseudoaleatorios usaron, pero los reportados por PCA y Monte Carlo [13] sí coinciden con la actual propuesta, por tal motivo no está claro los valores reportados en la literatura [7].

Es importante aclarar que el método de la actual propuesta dado por la ecuación (23) es más sencillo que el método de Taylor 1.5 dado por la ecuación (24), lo cual significa que el costo computacional es más bajo, porque necesita evaluar menos términos. Con respecto a la comparación del método PCA, éste necesita realizar la inversión de una matriz [13] y la actual propuesta no necesita invertir ninguna matriz. De la misma manera, el método Montecarlo necesita de la realización de muchos experimentos para el cálculo de la ecuación (10) y las trayectorias Brownianas [13]. Por lo tanto, se concluye que el método propuesto tiene menor esfuerzo computacional y es de más fácil implementación que los presentados en la literatura [7,13].

Para validar los resultados correctos aquí presentados, debe comprobarse con los valores determinísticos, para los cuales se usó el método de Runge-Kutta de orden $O(h^4)$. Así de esta forma fácilmente se pueden verificar la veracidad de los resultados obtenidos en la actual propuesta, mostrando que sería imposible que la desviación estándar fueran los valores reportados [7] y por consiguiente en [13-14], además de que los resultados muestran una mayor correspondencia con otros métodos y en media con los resultados del modelo determinístico.

Finalmente la última simulación consiste de una reactividad sinusoidal $\rho(t) = \rho_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)$, donde se definen los valores de los parámetros como: reactividad inicial $\rho_0 = 0.005333$, constante de decaimiento $\lambda_1 = 0.077s^{-1}$, fracción de precursor de neutrones $\beta_1 = 0.0079$, tiempo de generación de neutrones $\Lambda = 10^{-3}s$, fuentes externas de neutrones $q(t) = 0s^{-1}$, un periodo medio $T = 50s$ y con condiciones iniciales $X_0 = \left[1 \quad \beta_1/\lambda_1\Lambda\right]^T$.

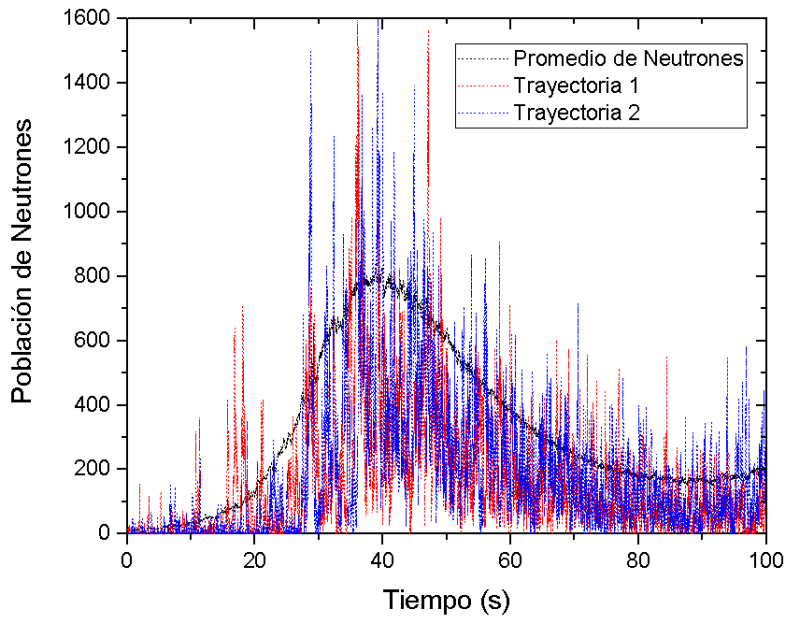


Figura 1. Promedio de población de neutrones y dos poblaciones de muestra para una reactividad sinusoidal

La Figura 1 representa solución mediante una reactividad sinusoidal, la cual se logró con un tamaño de paso $h = 0.1 s$. Los números pseudoaleatorios fueron generados mediante la semilla 200 y 5000 caminos Brownianos [15-16].

6. CONCLUSIONES

En este trabajo las ecuaciones estocásticas de la cinética puntual fueron resueltas numéricamente mediante el esquema de Euler-Maruyama, el cuál además de ser eficiente computacionalmente y de fácil implementación, proporcionó las aproximaciones esperadas para el cálculo de la densidad de neutrones y concentraciones de precursores de neutrones diferidos para diferentes formas de reactividad, condiciones iniciales y datos experimentales. Los resultados obtenidos por el esquema propuesto y la validación en promedio usando el método de Runge-Kutta fueron comparados en media y desviación estándar con métodos reportados en la literatura, de esta forma poniendo en duda la veracidad de los resultados del artículo [7].

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación es llevada gracias al semillero de investigación en Física Computacional, el grupo de investigación en Física Teórica, el programa de Física, y al apoyo académico y financiero de la Universidad Surcolombiana.

REFERENCIAS

1. Lamarsh J., *Introduction to Nuclear Reactor Theory*, Addison-Wesley, New York, Estados Unidos (2002).
2. Duderstadt J.J., Hamilton L.J., *Nuclear Reactor Analysis*, New York: John Wiley and Sons, New York, Estados Unidos (1976).
3. Hurwitz Jr., H., MacMillian, D.B., Smith, J.H., Storm, M.L., "Kinetics of low source reactor startups Part I", *Nuclear Science and Engineering*, **15**, p. 166-186 (1963a).
4. Hurwitz Jr., H., MacMillian, D.B., Smith, J.H., Storm, M.L., "Kinetics of low source reactor startups Part II", *Nuclear Science and Engineering*, **15**, p. 187-196 (1963b).
5. Stacey W.M., *Nuclear Reactor Physics*, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. kGaA, Darmstadt, Alemania (2007).
6. Evans L.C., *An introduction to stochastic differential equations*, U.C. Berkley, California, Estados Unidos (2002).
7. Saha R., "Numerical simulation of stochastic point kinetic equations in the dynamical system of nuclear reactor", *Annals of Nuclear Energy*, **49**, p. 154-159 (2012).
8. Hetrick, D.L., *Dynamics of Nuclear Reactors*, The University of Chicago Press, Chicago, Estados Unidos (1971).
9. Allen E.J., *Modeling with Itô Stochastic Differential Equations*, Springer, Dordrecht, Países Bajos (2007).
10. Hayes J.G., Allen E.J., *Thesis: Stochastic point kinetics equations in nuclear reactor dynamics*, Texas Tech University, Lubbock, Estados Unidos (2005).
11. Sauer T., *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations in Finance*, Springer, Heidelberg, Alemania (2012).
12. Kloeden P.E., Platen E., *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer, New York, Estados Unidos (1992).

13. Hayes J.G., Allen E.J., “Stochastic point kinetic equations in nuclear reactor dynamics”, *Annals of Nuclear Energy*, **32**, p. 572-587 (2005).
14. Ayyoubzadeh S.M., Vosoughi N., “An alternative stochastic formulation for the point kinetics”, *Annals of Nuclear Energy*, **63**, p. 691-695 (2014).
15. Saha R., Patra A., “Numerical solution for stochastic point kinetics equations with sinusoidal reactivity in dynamical system of nuclear reactor”, *Nuclear Science and Technology*, **7**, p. 231-242 (2013).
16. Nahla A.A., “Analytical exponential model for stochastic point kinetic equations via eigenvalues and eigenvectors”, *Nuclear Science and Technology*, **27**, p. 19-27 (2016).